

SOLUTIONS APPROXIMATIVES DE L'EQUATION DE DIFFUSION THERMIQUE

DAG THULIN

Skjutarevägen 5, S-772 00 Grängesberg, Suède

(Reçu le 24 juillet 1973)

Résumé—Les solutions de l'équation de la diffusion thermique sont données par une méthode intégrale. Le profil de la température est représenté approximativement par un polynôme.

Les cas traités sont: (a) L'entrée en échelon de la température à la surface; (b) La convection; (c) Le rayonnement. Ceci pour des plaques, des cylindres, des sphères et des corps composés par leurs intersections.

NOTATIONS

<p><i>a</i>, diffusivité thermique $\frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$ [m²/s];</p> <p><i>A</i>, c.f. équation (36);</p> <p><i>b</i>, coefficients, c.f. équation (9);</p> <p><i>B</i>, c.f. équation (37);</p> <p><i>Bi</i>, nombre de Biot (ou de Nusselt)</p> <p>$\frac{\alpha \cdot R}{\lambda}$ ou $\frac{\sigma \cdot \mathcal{F} \cdot T_g^4 \cdot R}{\lambda}$ [sans dimensions];</p> <p><i>c_p</i>, chaleur massique à pression constante [J/kg°C];</p> <p><i>C</i>, c.f. équation (38);</p> <p><i>ℱ</i>, facteur d'échange de rayonnement [sans dimensions];</p> <p><i>FO</i>, nombre de Fourier at/R^2 [sans dimensions];</p> <p><i>H</i>, fonction générale;</p> <p><i>l</i>, pénétration (distance de la surface) [m];</p> <p><i>l*</i>, pénétration relative l/R [sans dimensions];</p> <p><i>m</i>, coefficients, c.f. équation (39);</p> <p><i>n</i>, coefficient, c.f. équation (7);</p> <p><i>R</i>, rayon ou distance au centre [m];</p> <p><i>t</i>, temps [s];</p> <p><i>T</i>, température [K];</p> <p><i>T*</i>, température relative T/T_g [sans dimensions];</p> <p><i>u</i>, variable, c.f. équation (32);</p> <p><i>v</i>, c.f. équation (47);</p> <p><i>x</i>, coordonnée [m];</p> <p><i>x*</i>, distance relative de la surface x/l (pour $l(t) = R : x/R$) [sans dimensions];</p> <p><i>y</i>, coordonnée [m];</p> <p><i>z</i>, coordonnée [m];</p> <p><i>α</i>, coefficient superficiel de transmission thermique par convection [W/m²°C];</p> <p><i>θ</i>, température [°C];</p>	<p><i>Θ</i>, différence relative de température $\frac{\theta - \theta_i}{\theta_g - \theta_i}$ [sans dimensions];</p> <p><i>λ</i>, conductivité thermique [W/m°C];</p> <p><i>ρ</i>, densité [kg/m³];</p> <p><i>σ</i>, constante de Stefan, $5,7 \cdot 10^{-8}$ [W/m²K⁴].</p> <p>Indices</p> <p><i>g</i>, gaz, ambiant;</p> <p><i>i</i>, initial;</p> <p><i>c</i>, centre;</p> <p><i>0</i>, independant de la température;</p> <p><i>s</i>, surface;</p> <p><i>1</i>, le profil juste pénétré au centre.</p>
--	--

1. INTRODUCTION

LA SOLUTION de l'équation de diffusion thermique ne peut être obtenue que dans quelques cas par des solutions analytiques. Dans les autres cas, il faut résoudre les équations à l'aide de méthodes numériques, ce qui nécessite beaucoup de temps (ou de dépense, si l'on utilise un ordinateur). La méthode intégrale peut être une alternative pratique, si une réponse absolument exacte n'est pas nécessaire. Elle a été d'abord utilisée dans la théorie de la couche limite en convection forcée (voir par exemple Pohlhausen [1]). Goodman [2, 3] et Hills [4] l'ont employée pour calculer la solidification. Siddal [5] a trouvé des solutions dans quelques cas. Le premier exemple, d'une plaque avec entrée en échelon de la température à la surface, est traité par lui.

2. THEORIE

L'équation de diffusion thermique d'une plaque unidimensionnelle est

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x} \right) \quad (1)$$

où ρ est la densité
 c_p est la chaleur massique à pression constante
 ϑ est la température
 λ est la conductivité thermique
 X est la coordonnée.

Nous intégrons cette équation de la surface ($x = 0$) jusqu'au milieu du solide ($x = R$):

$$\rho \cdot c_p \cdot \int_{x=0}^R \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dx = \int_{x=0}^R \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) dx = \left(\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=R} - \left(\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (2)$$

Supposons que le gradient de température $\partial \vartheta / \partial x$ soit nul à une certaine distance $l(t)$ de la surface, ce qui est une approximation convenable.

L'équation (2) prend maintenant la forme:

$$\rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial}{\partial t} \int_{x=0}^{l(t)} (\vartheta - \vartheta_i) \cdot dx = - \left(\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (3)$$

où ϑ_i est la température initiale.

Mais pour une fonction générale H , on sait que

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \frac{dH}{dt} - \frac{\partial H}{\partial l} \cdot \frac{dl}{dt} \quad (4)$$

de sorte que

$$\frac{d}{dt} \int_{x=0}^{l(t)} (\vartheta - \vartheta_i) \cdot dx - (\vartheta_{x=l} - \vartheta_i) \cdot \frac{dl}{dt} = - \left(a \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (5)$$

où a est la diffusivité thermique, $\frac{\lambda}{\rho \cdot c_p}$.

Supposons que $\vartheta_{x=l} = \vartheta_i$ (ou, si $l(t) = R =$ distance au centre, que $dl/dt = 0$), ce qui est une approximation. On a alors

$$\frac{d}{dt} \int_{x=0}^{l(t)} (\vartheta - \vartheta_i) \cdot dx = - \left(a \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (6)$$

La valeur maximale de $l(t)$ est égale à R . C'est cette équation intégrale que nous utiliserons. Dans des cas plus généraux, comme les coordonnées radiales cylindrique et sphérique, l'équation de diffusion thermique s'écrit:

$$\begin{aligned} x < R: \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) - \frac{n \lambda}{R-x} \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \\ x = R: \rho \cdot c_p \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial t} &= (n+1) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

où $n = 0$ pour une plaque
 $n = 1$ pour un cylindre
 $n = 2$ pour une sphère.

De la même manière que ci-dessus, nous obtenons l'équation intégrale:

$$\frac{d}{dt} \int_{x=0}^{l(t)} \left(1 - \frac{x}{R} \right)^n \cdot (\vartheta - \vartheta_i) \cdot dx = - \left(a \cdot \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (8)$$

Supposons maintenant que le profil de la température ait la forme d'un polynôme,

$$\vartheta = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + \dots \quad (9)$$

où les coefficients b sont fonction du temps. Pour résoudre les termes de ce polynôme il faut que nous ayons autant de conditions aux limites que le nombre de termes de ce polynôme.

Deux de ses conditions aux limites ont été déjà utilisées pour obtenir l'équation intégrale, $\partial \vartheta / \partial x = 0$ et $\vartheta = \vartheta_i$ pour une distance $l(t)$ de la surface.

3. ENTREE EN ECHELON DE LA TEMPERATURE A LA SURFACE

3.1 Méthode 1

Conditions aux limites pour $t > 0$

$$x = 0 : \vartheta = \vartheta_g \quad (\vartheta_g \text{ est la température ambiante})$$

$$x = l(t) : \vartheta = \vartheta_i$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0$$

$$x = R : \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0$$

Le profil de température donné par l'équation (9) est (c.f. Fig. 1):

$$\begin{aligned} x \leq l(t) : \Theta &= \Theta_c + (1 - \Theta_c) \cdot (1 - \bar{x}^*)^2 \\ x \geq l(t) : \Theta &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

où \bar{x} est la distance relative x/l (pour $l(t) = R : x/R$)

Θ est la différence relative de température.

De l'équation (8) nous obtenons:

Plaque $\bar{l} < 1 : Fo = \bar{l}^2 / 12$ (11)

$$\bar{l} = 1 : \Theta_c = 1 - \exp(-3(Fo - Fo_c)) \quad (12)$$

Cylindre $\bar{l} < 1 : Fo = \bar{l}^2 / 12 - \bar{l}^3 / 36$ (13)

$$\bar{l} = 1 : \Theta_c = 1 - \exp(-8(Fo - Fo_c)) \quad (14)$$

Sphère $\bar{l} < 1 : Fo = \bar{l}^2 / 12 - \bar{l}^3 / 18 + \bar{l}^4 / 80$ (15)

$$\bar{l} = 1 : \Theta_c = 1 - \exp(-15(Fo - Fo_c)) \quad (16)$$

où Fo est le nombre de Fourier at/R^2 et \bar{l} est $l(t)/R$.

Pour $\bar{l} < 1, \Theta_c = 0$.

Fo_c est le nombre de Fourier quand $l(t)$ est arrivé au centre (solutions des équations (11), (13) et (15) quand $\bar{l} = 1$). Pour tous les cas de cette méthode $a = a_{s-\vartheta_g}$.

3.2 Méthode 2

En plus des conditions aux limites de la méthode 1 nous supposons que l'équation de diffusion thermique, équation (7), est valable à la surface, $x = 0$.

Nous obtenons:

Plaque

$$x \leq l(t): \Theta = \Theta_c + (1 - \Theta_c) \cdot \left(1 - \frac{3}{2} \cdot x^* + \frac{1}{2} \cdot x^{*3}\right) \quad (17)$$

$$x > l(t): \Theta = 0$$

$$l < 1 : \Theta_c = 0, Fo = l^2/8 \quad (18)$$

$$l = 1 : \Theta_c = 1 - \exp(-\frac{12}{5}(Fo - Fo_c)) \quad (19)$$

Cylindre

$$x \leq l(t): \Theta = \Theta_c + (1 - \Theta_c) \cdot \left(1 - \frac{6}{5} \cdot x^* - \frac{3}{5} \cdot x^{*2} + \frac{4}{5} \cdot x^{*3}\right) \quad (20)$$

$$x > l(t): \Theta = 0$$

$$l < 1 : \Theta_c = 0, Fo = \frac{1}{6} \cdot l^2 - \frac{11}{180} \cdot l^3 \quad (21)$$

$$l = 1 : \Theta_c = 1 - \exp(-\frac{40}{7} \cdot (Fo - Fo_c)) \quad (22)$$

Sphère

$$x \leq l(t): \Theta = \Theta_c + (1 - \Theta_c) \cdot \left(1 - x^* - x^{*2} + x^{*3}\right) \quad (23)$$

$$x > l(t): \Theta = 0$$

$$l < 1 : \Theta_c = 0, Fo = \frac{5}{24} \cdot l^2 - \frac{7}{45} \cdot l^3 + \frac{3}{80} \cdot l^4 \quad (24)$$

$$l = 1 : \Theta_c = 1 - \exp(-10 \cdot (Fo - Fo_c)) \quad (25)$$

Pour tous les cas de cette méthode $a = a_3 = \vartheta_3$.

3.3 Méthode 3

En plus des conditions aux limites de la méthode 1, nous supposons que l'équation de diffusion thermique est valable au centre (c.f. l'équation (7)).

Pour $l < 1$ les solutions sont identiques à la méthode 1.

Pour $l = 1$ nous obtenons:

$$\Theta = \Theta_c + (1 - \Theta_c) \cdot (1 - x^*)^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R^2}{a(n+1)} \cdot \frac{d\Theta_c}{dt} \cdot x(1-x)^2 \quad (26)$$

Plaque $\Theta_c = 1 - \exp(- (15 - \sqrt{153}) \cdot (Fo - Fo_c)) \approx 1 - \exp(-2.6(Fo - Fo_c)) \quad (27)$

Cylindre $\Theta_c = 1 - \exp(- (22 - \sqrt{244}) \cdot (Fo - Fo_c)) \approx 1 - \exp(-6.4(Fo - Fo_c)) \quad (28)$

Sphère $\Theta_c = 1 - \exp(- (30 - \sqrt{360}) \cdot (Fo - Fo_c)) \approx 1 - \exp(-11.0(Fo - Fo_c)) \quad (29)$

Pour cette méthode, la diffusivité thermique, a , dans le nombre de Fourier ne peut pas varier avec la température.

3.4 Comparaison avec solutions analytique et numérique

Sur la Fig. 1, nous avons représenté la partie des équations des profils qui dépend de la distance à la surface, et cela pour les trois méthodes.

La Fig. 2 donne la pénétration, l , en fonction du nombre de Fourier pour les deux premières méthodes (la méthode 3 est identique à la méthode 1 pour $l < 1$). La différence des deux méthodes semble être importante, mais quand nous prenons en considération les équations des profils, la différence est moindre.

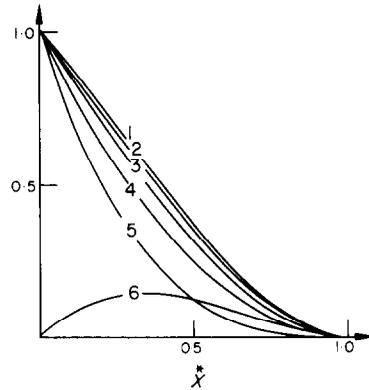


FIG. 1. Partie des équations des profils dépendant seulement de la distance de la surface

- 1. $1 - x^* - x^{*2} + x^{*3}$ méthode 2, sphère
- 2. $1 - \frac{6}{5}x^* - \frac{3}{5}x^{*2} + \frac{4}{5}x^{*3}$ méthode 2, cylindre
- 3. $1 - \frac{3}{2}x^* + \frac{1}{2}x^{*3}$ méthode 2, plaque
- 4. $(1 - x^*)^2$ méthode 1, convection et rayonnement
- 5. $(1 - x^*)^3$ méthode 3
- 6. $x^*(1 - x^*)^2$ méthode 3.

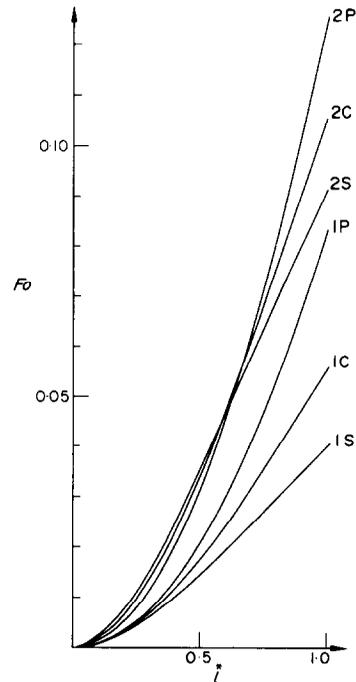


FIG. 2. Entrée en échelon. Nombre de Fourier en fonction de la pénétration relative. 1 = méthode 1. 2 = méthode 2. P = plaque; C = cylindre; S = sphère.

Pour une plaque infiniment épaisse il y a une solution analytique, [6]:

$$\Theta = 1 - \operatorname{erf}(x/\sqrt{4at}). \quad (30)$$

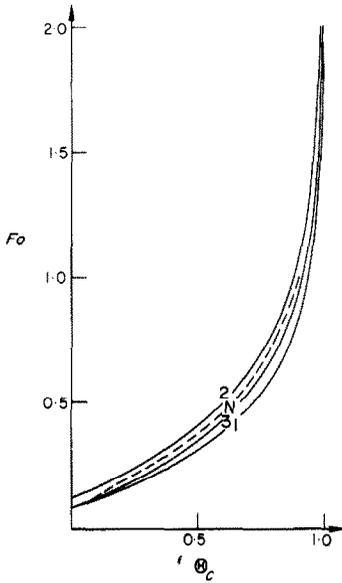


FIG. 3. Entrée en échelon, plaque. Nombre de Fourier en fonction de la différence relative de température au centre. 2 = méthode 2; N = numérique; 3 = méthode 3; 1 = méthode 1.

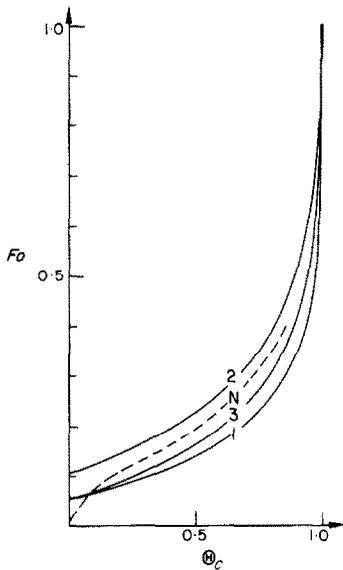


FIG. 4. Entrée en échelon, cylindre. Nombre de Fourier en fonction de la différence relative de température au centre. 2 = méthode 2; N = numérique; 3 = méthode 3; 1 = méthode 1.

Sur la Fig. 6 la solution analytique est comparée aux deux premières méthodes approximatives. Les deux méthodes suivent bien la solution analytique. En effet, les méthodes approximatives peuvent être reconnues

comme approximations de la fonction erf:

$$\text{erf}(u) \approx \begin{cases} u \leq \sqrt{3}: \frac{2u}{\sqrt{3}} - \frac{u^2}{3} \\ u \geq \sqrt{3}: 1 \end{cases} \text{méth. 1} \quad (31)$$

$$\text{erf}(u) \approx \begin{cases} u \leq \sqrt{2}: \frac{3u}{2\sqrt{2}} - \frac{u^3}{4\sqrt{2}} \\ u \geq \sqrt{2}: 1 \end{cases} \text{méth. 2.} \quad (32)$$

Les Figs. 3-5 donnent Fo en fonction de Θ_c pour tous les différents méthodes et divers corps, en comparaison avec les solutions numériques de Crank [6]. En général, les conclusions des figures sont que les méthodes approximatives sont meilleures pour une plaque que pour un cylindre ou une sphère, et que les deux dernières méthodes sont meilleures que la première.

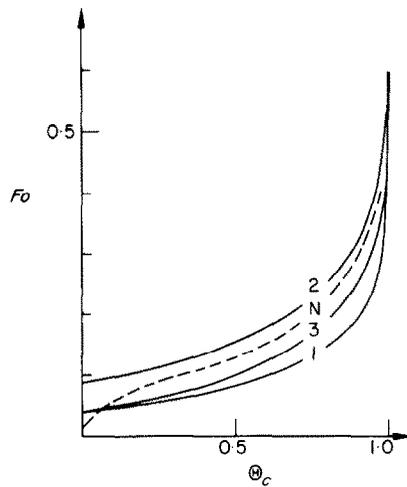


FIG. 5. Entrée en échelon, sphère. Nombre de Fourier en fonction de la différence relative de température au centre. 2 = méthode 2; N = numérique; 3 = méthode 3; 1 = méthode 1.

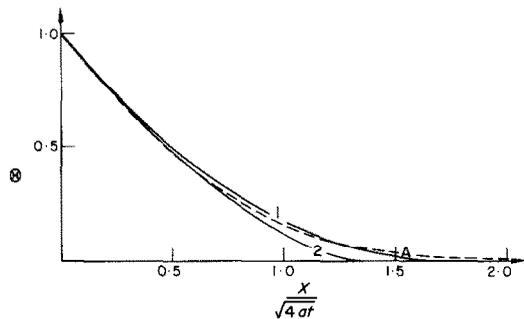


FIG. 6. Entrée en échelon, plaque infiniment épaisse. Différence relative de température en fonction de $x/\sqrt{4\alpha t}$. 1 = méthode 1; 2 = méthode 2; A = analytique.

Pour $x = 0$ la solution est représentée sur la Fig. 7, où elle suit bien la solution approximative, $A(\Theta_s)$. Il est ici encore certainement possible de remplacer les fonctions erf dans l'équation (41) par une expression approximative de l'équation (31) ou (32).

4.3 Pénétration au centre

D'après l'équation (8), nous obtenons

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1 - \Theta_s}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{Bi}{n+3} \right) \right] = - \frac{\alpha}{R \rho c_p} \cdot (1 - \Theta_s). \quad (42)$$

Cette équation peut être résolue par une méthode numérique. Si la conductivité λ est indépendante de la température, la solution est:

$$\Theta_s = 1 - (1 - \Theta_{s1}) \exp \left[- \frac{n+1}{1 + \frac{Bi}{n+3}} Bi(Fo - Fo_c) \right] \quad (43)$$

où Θ_{s1} est la différence relative de température à la surface quand $l(t)$ a atteint $R(Fo = Fo_c)$.

5. RAYONNEMENT

Les conditions aux limites sont les mêmes que pour la convection, sauf que la condition à la surface qui est:

$$x = 0: -\lambda \cdot \frac{\partial T}{\partial x} = \mathcal{F} \cdot \sigma \cdot (T_g^4 - T^4),$$

où \mathcal{F} est le facteur de rayonnement qui est une fonction de la géométrie et du facteur d'émission,

σ est la constante de Stéfán,

T est la température ambiante.

Résoudre l'équation (8) pour $l(t) < R$ est difficile. Pour cette raison nous ne donnons ici la solution que lorsque $l(t)$ a atteint son maximum, R .

Le profil obtenu à l'aide de l'équation (9) est

$$T^* = T_s^* - \frac{Bi}{2} \cdot (1 - T_s^{*4}) + \frac{Bi}{2} \cdot (1 - T_s^{*4}) \cdot (1 - x^2), \quad (44)$$

où T^* est la température relative, T/T_g ,

$$Bi = \frac{\mathcal{F} \sigma T_g^4 R}{\lambda}.$$

D'après l'équation (9), nous obtenons

$$T_s^{*4} = 1 - (1 - T_{s1}^{*4}) \cdot \exp \left[- \frac{n+1}{1 + \frac{Bi}{n+3}} Bi(Fo - Fo_c) \right], \quad (45)$$

où T_{s1}^* est la température relative à la surface quand $l(t)$ a atteint la valeur $R(Fo = Fo_c)$.

Nous pouvons considérer que T_{s1}^* et Fo_c sont respectivement égaux à 1 et 0 si le corps n'est pas épais.

Dans le cas contraire, T_{s1}^* et Fo_c peuvent être obtenus en utilisant la solution de convection en remplaçant

le coefficient superficiel de transmission thermique α par l'approximation

$$\alpha \approx \mathcal{F} \cdot \sigma \cdot (T_i^2 + T_g^2) \cdot (T_i + T_g). \quad (46)$$

6. CORPS COMPOSES

Si la condition à la limite à la surface est la même pour tous les côtés d'un corps, les températures peuvent être obtenues par une méthode indiquée par Luikov [7]. L'équation générale que Luikov a prouvé est

$$\Theta_{x,y,z} = 1 - \prod_{i=x,y,z} (1 - \Theta_i). \quad (47)$$

Par exemple, un parallélépipède peut être considéré comme l'intersection de trois plaques infinies.

La température d'un point x, y, z est obtenue par les solutions des plaques infinies pour les coordonnées x, y et z respectivement, mises dans l'équation (47).

7. EXEMPLE

Un cylindre d'acier (diamètre 4 cm, longueur 4 cm), à une température de 825°C, est plongé dans de l'huile à 25°C. Quelles sont les températures dans l'échantillon après 4 min?

Supposons que $\alpha = 1000 \text{ W/m}^2\text{C}$

$$\lambda = 40 \text{ W/m}^\circ\text{C}$$

$$\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$$

$$c_p = 4500 \text{ J/kg}^\circ\text{C}.$$

L'échantillon peut être considéré comme l'intersection d'une plaque et d'un cylindre. Utilisons la symétrie des corps.

L'équation (33) donne:

$$l = 1 = \frac{2 \cdot \Theta_{s1}}{1 - \Theta_{s1}} \frac{1}{Bi} \quad \text{où} \quad Bi = \frac{\alpha R}{\lambda} = \frac{1000 \times 0,04/2}{40} = 0,50$$

ce qui conduit à $\Theta_{s1} = 0,20$.

Le nombre de Fourier est:

$$Fo = \frac{at}{R^2} = \frac{\lambda t}{\rho c_p R^2} = \frac{40 \times 4 \times 60}{7800 \times 4500 \times \left(\frac{0,04}{2}\right)^2} = 0,685$$

	plaque	cylindre
Equation (35), Fig. 7:	$Fo_c = 0,156$	$0,118$
Equation (43)	$\Theta_s = 0,36$	$0,515$

Equation (33) donne pour les deux corps:

$$\text{plaque: } \Theta = 0,36 - \frac{0,5}{2} (1 - 0,36) (1 - (1 - x^2)^2)$$

$$\text{cylindre: } \Theta = 0,515 - \frac{0,5}{2} (1 - 0,515) (1 - (1 - y^2)^2).$$

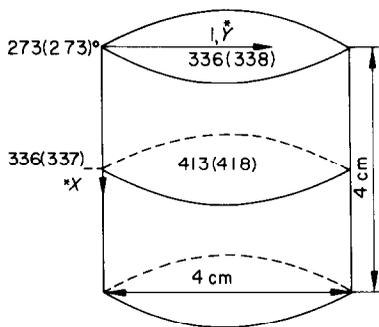


FIG. 8. Exemple. Températures obtenues par la méthode approximative pour un échantillon d'acier à 4 min dans de l'huile. Entre parenthèses températures calculées par une méthode numérique.

Pour l'échantillon considéré comme l'intersection de la plaque et du cylindre, l'équation (47) donne:

$$\Theta_{x,y}^* = 0,0194(5 - (1 - x^*)^2)(5 - (1 - y^*)^2)$$

et $\Theta_{x,y}^* = 25 + 15,54(5 - (1 - x^*)^2)(5 - (1 - y^*)^2)$.

Sur la Fig. 8, les températures les plus importantes sont données en comparaison avec les températures calculées par une méthode numérique (entre parenthèses).

8. CONCLUSIONS

L'intérêt de la méthode intégrale est que, même pour les cas où il n'y a pas de solution analytique, une solution rapide et souvent suffisamment exacte peut

être fournie. Il est aussi parfois très pratique d'avoir le profil de la température sous la forme d'un polynôme, parce qu'il est alors facile de la dériver pour obtenir la densité de flux ou de l'intégrer pour obtenir la quantité de chaleur.

Remerciements—L'auteur remercie la Marine Royale de Suède qui, sans le savoir, lui a donné la possibilité d'effectuer ce travail pendant son service militaire.

Pour les vérifications numériques et analytiques, ainsi que pour la désignation des figures, l'utilisation de son ordinateur fut indispensable.

RÉFÉRENCES

1. K. Pohlhausen, Zur näherungsweise Integration der Differentialgleichung der laminaren Grenzschicht, *Z. Angew. Math. Mech.* **1**, 252–8 (1921).
2. T. R. Goodman, The heat balance integral and its application to problems involving a change of phase, *Trans. Am. Inst. Mech. Engrs.* **80**, 335–42 (1958).
3. T. R. Goodman, The heat balance integral—further considerations and refinements, *J. Heat Transfer* **83**, 83–6 (1961).
4. A. W. D. Hills, *Heat and Mass Transfer in Process Metallurgy*, pp. 141–171. London (1967).
5. R. G. Siddal, Simple approximate solutions of the equation of heat conduction, *Fuel Soc. J.* **13**, 19–27 (1962).
6. J. Crank, *The Mathematics of Diffusion*. Clarendon Press, London (1957).
7. A. V. Luikov, *Analytical Heat Diffusion Theory*, pp. 283–288. Academic Press, New York (1968).

APPROXIMATE SOLUTIONS OF THE EQUATION OF HEAT CONDUCTION

Abstract—Solutions of the differential equation for heat conduction are derived by an integral method. The temperature profile is by approximation represented by a polynomial. The cases treated are: (a) step increase of the surface temperature; (b) convection; (c) radiation, and this for slabs, cylinders, spheres and bodies composed by their intersections.

NÄHERUNGSLÖSUNGEN VON WÄRMELEITUNGSGLEICHUNGEN

Zusammenfassung—Lösungen der Differentialgleichungen der Wärmeleitung sind nach einem Näherungsverfahren abgeleitet. Das Temperaturprofil ist als Polynom angenähert. Für Platten, Zylinder, Kugeln und Schnittkörper davon wurden folgende Fälle behandelt: (a) stufenweise Erhöhung der Oberflächentemperatur (b) Konvektion (c) Strahlung.

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Аннотация—С помощью интегрального метода получены решения дифференциального уравнения теплопроводности. Температурный профиль в приближенном виде представлен полиномом. Для пластины, цилиндра, шара и тел, составленных из этих элементов, рассматриваются: а) скачкообразное увеличение температуры поверхности, б) конвекция и в) лучистый перенос.